

ANÁLISE ESTÁTICA DE PLACAS FINAS ATRAVÉS DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO. Carolina dos Santos Siqueira Longo, Luiz Carlos Facundo Sanches. – Exatas – Engenharia Civil – Departamento de Matemática – Faculdade de Engenharia – Campus de Ilha Solteira.

A placa é um elemento estrutural bastante utilizado nas construções de engenharia. Atualmente, mesmo com a adoção de modelos matemáticos simplificados, não é possível obter uma solução geral analítica para maioria dos modelos estruturais que são desenvolvidos. Por outro lado, a adoção de métodos numéricos apropriados e uma simulação computacional adequada são grandes ferramentas de análise e resolução aproximada de muitos dos problemas estruturais que fazem uso de modelos de placa. Nos últimos vinte anos, os métodos numéricos mais utilizados são: Método dos Elementos Finitos (MEF) e Método dos Elementos de Contorno (MEC). Na análise pelo MEC, uma das diferenças principais está no tratamento direto do Problema de Valor de Contorno (PVC). Além disto, usando a formulação clássica de placa fina (*Kirchhoff*), forças de canto são introduzidas na Equação Integral de Contorno (EIC) que descreve o problema. Forças de canto aparecem em consequência da hipótese clássica da placa fina que estabelece que as curvaturas estejam relacionadas com a segunda derivada do deslocamento, sendo condição necessária para reduzir as variáveis do contorno. A fim de compreender o comportamento estrutural da placa, este trabalho pretende aplicar as EICs da teoria de placa fina, isotrópicas e homogêneas, por meio de um modelo discreto em elementos de contorno. O estudo é feito em regime elástico-linear, mediante hipóteses de pequenas deformações e com o equilíbrio na posição indesejada. Um problema geral de placa fina com condições de contorno homogêneas e carregamento distribuído constante foi resolvido para mostrar a acuidade da formulação apresentada. Os resultados obtidos foram comparados com modelos analíticos disponíveis na literatura.

Introdução

A técnica de contorno aplicada a modelos estruturais de placa fina começou a ser estudada no final da década de 70 por Bézine (1978), Stern (1979) e Danson (1979). Esta análise empregava derivadas do deslocamento fora do plano da placa dentro das equações constitutivas. Duas condições de contorno necessitavam ser satisfeitas para a obtenção de uma solução geral. Além disto, uma reação concentrada é colocada em cada canto como uma incógnita adicional no PVC quando uma placa poligonal era considerada. A intenção deste trabalho é aplicar o tratamento numérico desenvolvido por Sanches (1999) para entender o comportamento estrutural da placa e determinar esforços, deslocamentos e reações de canto da placa. Na implementação da técnica de contorno, o tratamento numérico foi feito utilizando elementos de contorno isoparamétricos lineares. As EICs foram resolvidas usando as soluções fundamentais formuladas por Danson (1979). Elementos de contorno contínuos ou descontínuos foram usados de acordo com as características de cada PVC e seus nós colocados nas extremidades dos elementos, que também estão associados aos lugares geométricos dos pontos de colocação onde são calculadas as equações integrais de contorno. Quando houve a necessidade da utilização de elementos descontínuos, os pontos de colocação foram deslocados para o interior do elemento a uma distância igual a um quarto do comprimento do mesmo. Formulações analíticas foram utilizadas para tratar as equações integrais de contorno e um tratamento numérico com a quadratura de *Gauss* foi utilizado nas demais regiões. Além da análise estritamente numérica, é sabido que quando uma placa é dimensionada com finalidades de projeto o engenheiro se depara com a decisão sobre o tratamento apropriado das forças de canto, ou melhor, se as forças de canto envolvidas no problema devem ser incluídas ou não. Este trabalho pretende discutir também esta característica por meio da análise pelo MEC.

Equações Fundamentais de Placa

Uma placa de espessura uniforme, de domínio Ω e contorno Γ , é referenciada às coordenadas do plano médio x_α e à coordenada da espessura x_3 . As bordas da placa são hipoteticamente consideradas livres de tração tangencial ($\sigma_{\alpha 3}$ é zero), mas submetidas às pressões normais g . Neste caso, os índices gregos variam de $\{1, 2\}$. As equações do equilíbrio para elemento infinitesimal da placa sob um carregamento transversal distribuído q é dado por:

$$M_{\alpha\beta,\beta} - Q_\alpha = 0, \quad Q_{\alpha,\alpha} + g = 0 \quad (1)$$

Nas equações de equilíbrio, Q_α é o esforço cortante, $M_{\sigma\beta}$ é o momento fletor e torção por unidade do comprimento. As relações constitutivas em termos do deslocamento fora do plano da placa w são dadas por:

$$M_{\alpha\beta} = -D(1-\nu) \left(w_{,\alpha\beta} + \frac{\nu}{1-\nu} w_{,\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta} \right), \quad Q_\alpha = -D w_{,\gamma\gamma\alpha} \quad \text{e} \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (2)$$

sendo D a rigidez à flexão, h a espessura e ν o coeficiente de *Poisson*.

Formulação pelo MEC

De forma específica, quando a análise pelo MEC é aplicada na resolução de um problema relacionado à teoria clássica, a EIC para uma placa fina é dada por:

$$K_a w + \int_{\Gamma} [V_n^* \cdot w - M_n^* \cdot w_{,n}] d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}^* w_{ci} = \int_{\Gamma} [V_n \cdot w^* - M_n \cdot w_{,n}^*] d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci} w_{ci}^* + \iint_{\Omega} q \cdot w^* d\Omega \quad (3)$$

$$\text{e,} \quad R_{ci} = (M_{ns}^F - M_{ns}^B)_i. \quad (4)$$

K_a depende somente da geometria do contorno; o número de cantos é N_c ; R_{ci} é a reação de canto que é relacionada ao momento de torção M_{ns} no para diante (F) e para trás (B) com referência ao canto i ; w^* é o deslocamento fundamental devido a Danson (1979) e corresponde ao deslocamento provocado por uma carga unitária aplicada em um ponto do domínio da placa:

$$w^* = \frac{1}{8\pi D} r^2 \left(\ln r - \frac{1}{2} \right) \quad (5)$$

r representa a distância entre o ponto de colocação (fonte) e aqueles situados no campo de deslocamentos. Os valores $w_{,n}^*$, V_n^* , M_n^* foram obtidos da solução fundamental, então:

$$w_{,n}^* = \frac{1}{4\pi D} r \ln r \frac{\partial r}{\partial n} \quad (6)$$

$$M_n^* = -\frac{1}{4\pi} \left[(1+\nu) \ln r + \left(\frac{\partial r}{\partial n} \right)^2 + \nu \left(\frac{\partial r}{\partial s} \right)^2 \right] \quad (7)$$

$$V_n^* = \frac{1}{4\pi} \left[(1-\nu)^2 \frac{\partial r}{\partial n} \left(\frac{\partial r}{\partial s} \right)^2 - \frac{\partial r}{\partial n} (3-\nu) \right] \quad (8)$$

Adicionalmente, na formulação pelo MEC, quando uma carga uniforme de domínio é aplicada utiliza-se uma conversão da integral de domínio apresentada pela EIC para uma integral de contorno, isto é:

$$\iint_{\Omega} q(y) w^*(x, y) d\Omega(y) = q \oint \frac{r(x, y)^3}{32\pi D} (\ln(r) - 0.75) r_{\alpha n} n_{\alpha}(y) ds(y) \quad (9)$$

sendo x e y as coordenadas do plano da placa.

Formulação Algébrica e Implementação Numérica

Na implementação numérica das EICs para o problema de placa fina utilizou-se elementos de contorno isoparamétricos lineares. Todos os parâmetros nodais foram colocados nas extremidades do elemento e quando houve a necessidade da utilização de elementos descontínuos, os pontos de colocação (onde se resolve a EIC) eram deslocados para o interior do elemento a uma distância igual a um quarto do comprimento do elemento. Na placa fina, o número de equações integrais a serem geradas é

exatamente o dobro do número de nós geométricos mais uma equação para cada reação de canto do problema. A EIC foi escrita nos nós do contorno (formulação analítica) e em pontos externos (formulação numérica). Os pontos externos foram colocados a uma distância igual a um quarto do comprimento do elemento e no sentido normal de cada nó do limite. Quando havia uma reação de canto, a integral de contorno correspondente foi escrita no ponto externo em uma linha que contém a linha bissetriz do canto e a uma distância igual a $\sqrt{2}/4$ do comprimento do elemento.

Resultados

Nesta seção são apresentados alguns resultados numéricos através do MEC para análise de um problema clássico de placas finas. Os valores determinados são comparados com valores analíticos da literatura. Nos exemplos analisados, as variáveis são aproximadas por elementos lineares contínuos. Exceto nos nós adjacentes aos cantos, onde são utilizados elementos lineares descontínuos. Foram implementadas malhas relativamente simples, garantindo uma boa precisão do método.

Exemplo 1: Placa quadrada apoiada no contorno e uniformemente carregada.

Neste exemplo analisou-se o problema clássico de uma placa fina quadrada de lado ℓ , simplesmente apoiada no contorno, conforme ilustra a Figura 1. O carregamento g foi considerado unitário e uniformemente distribuído no domínio. A rigidez à flexão da placa D também foi considerada unitária e o coeficiente de *Poisson* ν foi considerado igual a 0.3.

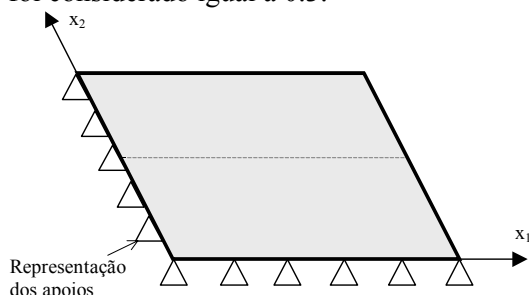


Figura 1. Placa quadrada apoiada no contorno e uniformemente carregada.

Para esta análise, o contorno foi discretizado em 20, 40 e 80 elementos isoparamétricos lineares, 5, 10 e 20 elementos de contorno por lado, respectivamente. Os valores dos deslocamentos na linha de centro da placa são apresentados na Tabela 1 e Figura 2.

Tabela 1. Deslocamentos na linha de centro da placa da Figura 1.

MÉTODO	w [100D/gℓ ⁴]				
	0,1 ℓ	0,2 ℓ	0,3 ℓ	0,4 ℓ	0,5 ℓ
20 elementos	0,1323	0,2470	0,3345	0,3888	0,4071
40 elementos	0,1316	0,2464	0,3337	0,3880	0,4063
80 elementos	0,1316	0,2464	0,3337	0,3880	0,4063
Teoria Clássica	0,1320	0,246	0,334	0,388	0,406

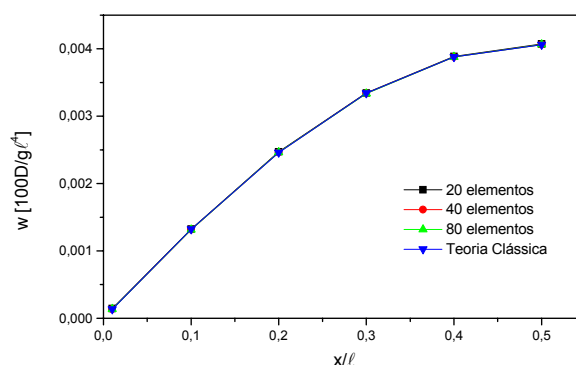


Figura 2. Deslocamentos na linha de centro da placa.

Os resultados encontrados de momentos fletores na linha de centro da placa, são apresentados na Figura 3:

MÉTODO	M(xx) [10D/gℓ ²]				
	0,1 ℓ	0,2 ℓ	0,3 ℓ	0,4 ℓ	0,5 ℓ
20 elementos	0,2091	0,3433	0,4237	0,4659	0,4789
40 elementos	0,2091	0,3435	0,4241	0,4663	0,4793
80 elementos	0,2091	0,3432	0,4240	0,4658	0,4789
Teoria Clássica	0,209	0,343	0,424	0,466	0,479

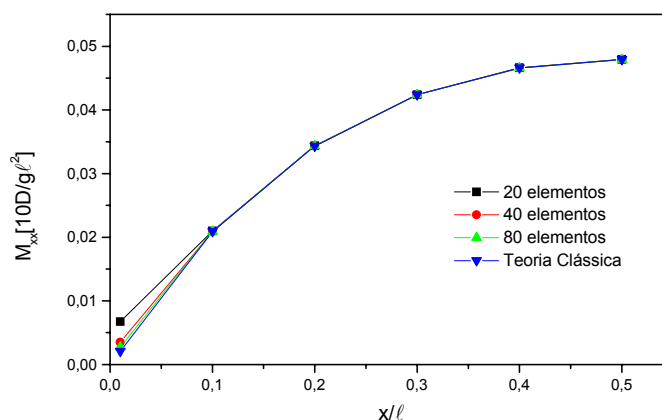


Figura 3. Momentos fletores máximos na linha de centro da placa.

Analisando os valores mostrados nas tabelas e observando os gráficos, praticamente não existem diferenças entre os resultados obtidos dividindo-se o contorno em 40 ou 80 elementos lineares, se compararmos com os resultados teóricos da teoria clássica. Apenas na discretização com 20 elementos, o valor numérico dos momentos fletores próximos a borda da placa sofre uma pequena alteração devido a proximidade com o contorno. Apesar deste fato, mostramos aqui a grande versatilidade do MEC no tratamento dos problemas usuais de placa fina.

Conclusões

A análise numérica apresentada no presente trabalho foi feita de duas maneiras: com inclusão da reação de canto e sem a inclusão da reação. O ponto principal é que a inclusão ou não das reações altera minimamente as respostas finais. Apenas aparecem alguns pequenos picos de deslocamento e momentos torçores nas regiões de canto da placa que não foi mostrado aqui. Este comportamento explica por que uma placa é levantada nos cantos quando uma carga distribuída é aplicada na superfície no sentido descendente. Os resultados comprovam ainda o excelente nível de precisão do MEC, sendo os mesmos praticamente coincidentes com as respostas analíticas. Entendemos que a metodologia utilizada na resolução deste problema clássico e até mesmo em problemas envolvendo situações específicas já está consolidado. Uma idéia futura seria analisar as relações de espessura em relação ao vão da placa, ou seja, o limiar onde a teoria de placas finas pode ser aplicada.

Referências Bibliográficas

- Bézine, G., Gamby, D. A. A New Integral Equation Formulation for Plate Bending Problems. *Recent Advances in Boundary Element Method*. Pentech Press, London, 1978.
- Danson, D.J. *Analysis of Plate Bending Problems by Direct Boundary Element Method*. Southampton. UK. Dissertation (M. Sc.), University of Southampton, 1979.
- Sanches, L. C., Palermo Jr., L. *Some Results from Moderately Thick Plate Analysis with the BEM*. 6th Pan American Congress of Applied Mechanics, Rio de Janeiro, Brazil, 1999.
- Stern, M., A General Boundary Integral Formulation for the Numerical Solution of Plates Bending Problems. *International Journal of Solids and Structures*, 1979.